**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ**

# A.H.Семенов, С.А. Гапонов

***Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук, 630090 , Новосибирск***

Решение задач устойчивости параллельных течений сводится к нахождению собственных значений системы однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с однородными граничными условиями. Одна из проблем классической теории устойчивости состоит в локализации собственных значений, соответствующих неустойчивому состоянию ламинарного течения. Поиск собственных значений, отвечающих наиболее неустойчивым частотам, достаточно сложен из-за большого их количества.

Поэтому ставится задача численного моделирования развития возмущений во времени. В этом случае на достаточно больших временах поведение возмущений определяется единственной волной с наибольшим инкрементом.

Линеаризованная нестационарная система уравнений возмущений в плоско-параллельном стационарном потоке, типа $q\left(y,x,t\right)exp⁡(iβz)$, в приближении Дана-Линя может быть записана в виде[1]:

$$\frac{∂f}{∂t}=-U\frac{∂f}{∂x}-U^{'}v-\frac{\frac{∂p}{∂x}}{γM^{2}ρ}+\frac{μf"}{Reρ}$$

$$\frac{∂v}{∂t}=-U\frac{∂v}{∂x}-\frac{π^{'}}{γM^{2}ρ}+ \frac{4μv"}{3Reρ}$$

$$\frac{∂r}{∂t}=-U\frac{∂r}{∂x}-ρ^{'}v-ρ\left(\frac{∂f}{∂x}+iβh+v^{`}\right) $$

$ρ\frac{∂θ}{∂t}=-ρ\left[U\frac{∂θ}{∂x}+T^{'}v\right]-\left(γ-1\right)\left(\frac{∂f}{∂x}+iβh+v^{`}\right)+\frac{γμθ"}{σRe}$(1)

$$π=\frac{r}{ρ}+\frac{θ}{T}$$

$$\frac{∂h}{∂t}=-U\frac{∂h}{∂x}-\frac{iβπ}{γρM^{2}}+ \frac{h"μ}{Reρ}$$

**©** **Семенов А.Н., Гапонов С.А. , 2014**

Здесь $U,ρ,T,μ,P$- осредненные скорость, плотность, температура, вязкость, давление; $f,αφ,h$- амплитуды возмущения компонент скорости(продольной, нормальной, боковой), $π,θ,r$- амплитуды возмущения давления, температуры, плотности; $M$- число Маха на внешней границе пограничного слоя; $Re$- число Рейнольдса; $γ$- показатель адиабаты, $σ$-число Прандтля. Штрих обозначает дифференцирование по координате $y$; $β$- волновое число. Все величины обезразмерены по толщине пограничного слоя и по физическим величинам на внешней границе пограничного слоя.

Кроме условий монохроматичности по боковой координате $z$ *,* задача решается для периодических возмущений по координате$ x$*,* то есть $q\left(y,x,t\right)=q(y,x+X,t)$*.* Кроме того, уравнения (1) решаются с граничными условиями:

$$\left.f\right|\_{y=0}=\left.φ\right|\_{y=0}\left. =θ\right|\_{y=0}, \left.h\right|\_{y=0}=0$$

$$\left.f\right|\_{y=\infty } ,\left.φ\right|\_{y=\infty },\left. θ\right|\_{y=\infty }=\left. h\right|\_{y=\infty }=0$$

 Вся идея подхода состоит в том, что при произвольных начальных данных на достаточно больших временах будет преобладать наиболее неустойчивая волна, изменяющаяся во времени по закону $exp\left[-iωt\right]. $При этом реальная или мнимая часть$ q\left(y\_{c},x,t\_{c}\right) $будет изменяться как $q\_{r,i}\left(y,x,t\right)=a\_{r,i}sin⁡(αx+ψ\_{r,i})$. Тогда величина $-iω=\frac{dln(q)}{dt}$, а значение $α=\frac{2πn}{X}$,где n- число периодов укладывающихся на расчетном интервале *X.*

Система (1) решалась численно методом расщепления по направлениям [3].

Были проведены расчеты на примере пограничного слоя при числе Маха набегающего потока М=2 и числе Рейнольдса Re=600. За толщину всего слоя брали Y=40. В качестве теста использовались известные результаты теории устойчивости, согласно которой наиболее неустойчивыми волнами являются волны с волновыми числами α =0.05 и $β=α·tg60°. $Соответственно период $X=\frac{2π}{α}$ .

Некоторые результаты расчетов представлены на рисунках 1 и 2. На первом рисунке (а) показаны зависимость амплитуды возмущения давления возле стенки (Y=0) от времени. Нижний график показывает(левая шкала) развитие возмущения во времени в промежутке T=2000—3000, верхний график(правая шкала) это увеличенный начальный участок времени T=2000—2200. Здесь отчетливо видно, что еще присутствует несколько волн, но со временем наиболее неустойчивая выделяется и изменяется по закону $exp\left[-iωt\right]$, тогда частоту становится легко определить. В нашем случае $ω=0.0013-0.0265i$

 а б



Рис.1. Амплитуды возмущения давления

a-возле стенки Y=0;б-вдоль координаты X.

На первом графике (б) показано распределение давления вдоль координаты X, при T=2000 и T=3000 Видно, что при T=2000 еще не получено периодичное решение, но, как и в случае первого графика (а) при T=3000 можно отчетливо наблюдать, что счет стабилизировался, и получилось периодичное по X решение.



Рис.2. Сопоставлений результатов распределения продольной скорости согласно классической теории и расчета.

 В результате расчёта были полученные хорошие соответствия результатов предложенного метода и классической теории, что кроме того, подтверждается рис. 2, где представлена зависимость абсолютного значения продольной скорости от нормальной координаты. Аналогичные результаты были получены и для остальных компонент скорости, а также давления, температуры и плотности. Небольшие расхождения в полученных значениях связаны с конечностью интервала интегрирования по Y, но как показывает практика, при увеличении Y расчеты согласуются лучше.

Таким образом, был реализован численный метод, моделирующий линейные пространственно-периодические возмущения на пластине в сверхзвуковом потоке. Полученные результаты расчета хорошо согласуются с классической теорией устойчивости и работами [2]. В дальнейшем предполагается, что данный подход будет применен для более сложных течений и граничных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гапонов С.А. Маслов А.А.** Развитие возмущений в сжимаемых потоках Н., Наука, 1980, стр.46-50.
2. **Mack L. M.** Computation of the stability of the laminar compressible boundary layer.-Methods in Computation Phys.,1965 v.4, p. 247-299
3. **Ковеня В.М**. Разностные методы решения многомерных задач. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т , 2004, стр. 37-45